

# **FYZIKÁLNĚ A TVAROVĚ ORTOTROPNÍ DESKY**

**Pokyny k sestavování vstupních fyzikálních dat u mostních,  
stropních a základových desek  
s různými průřezy ve dvou vzájemně kolmých směrech**

<b>1</b>	<b>ÚČEL TEXTU.....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>METODA .....</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>HLAVNÍ ZÁSADA ŘEŠENÍ .....</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>SLOŽKY NAPĚTÍ U FYZIKÁLNĚ ORTOTROPNÍ DESKY.....</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>VNITŘNÍ SÍLY U FYZIKÁLNĚ ORTOTROPNÍ DESKY.....</b>	<b>6</b>
5.1	TECHNICKÁ TEORIE DESEK BEZ Vlivu PŘÍČNÉHO SMYKU .....	6
5.2	DESKY S Vlivem PŘÍČNÉHO SMYKU .....	9
<b>6</b>	<b>TVAROVĚ ORTOTROPNÍ DESKY.....</b>	<b>10</b>
6.1	HLAVNÍ ZÁSADY PŘEVODU NA FYZIKÁLNÍ ORTOTROPII .....	10
6.2	JEDNODUCHÉ TYPY ORTOTROPNÍCH DESEK.....	11
6.2.1	<i>Energetická ekvivalence průřezových charakteristik .....</i>	<i>11</i>
6.2.2	<i>Ohybové a kroucí momenty.....</i>	<i>15</i>
6.2.2.1	Deska bez příčné kontrakce .....	15
6.2.2.2	Desky s příčnou kontrakcí .....	19
6.2.3	<i>Posouvající síly a reakce.....</i>	<i>23</i>
6.3	DESKY S Vlivem PŘÍČNÉHO SMYKU. ....	24
6.4	KOMŮRKOVÉ PRŮŘEZY .....	27
6.4.1	<i>Tlustostěnné komůrkové průřezy – vylehčené desky.....</i>	<i>27</i>
6.4.2	<i>Tenkostěnné komůrkové průřezy .....</i>	<i>30</i>
6.4.3	<i>Srovnávací příklad .....</i>	<i>32</i>
6.5	ŽALUZIOVÉ DESKY.....	33
6.6	JINÉ TYPY DESEK.....	35

## 1 Účel textu

Účelem textu je podat návod k výpočtu těch vstupních údajů ortotropních desek, které charakterizují jejich fyzikální vlastnosti, tj. ohybovou, torsní a smykovou tuhost. Tyto vlastnosti jsou v programech popsány maticí fyzikálních konstant  $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_{ik}]$ , takže jde v podstatě o výpočet jejich členů  $D_{ik}$ .

## 2 Metoda

Předpokládá se řešení metodou konečných prvků v její nejužívanější deformační variantě s neznámými parametry deformace geometrické povahy. Matice  $\mathbf{D}$  spojuje vzájemně určité statické veličiny  $\boldsymbol{\sigma}$  (složky napětí, nebo u desek jejich výslednice po průřezu – tzv. vnitřní síly desky) s příslušnými geometrickými veličinami  $\boldsymbol{\varepsilon}$  složkami deformace, nebo u desek s těmi derivacemi průhybové plochy  $w$ , na nichž složky deformace závisí):

$$(1) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} .$$

Matice  $\mathbf{D}$  se může zadat pro každý prvek nebo skupinu prvků zvlášť. Tak lze řešit desky fyzikálně po prvcích nehomogenní nebo tvarově po prvcích proměnné, čímž lze vyjádřit dosti přibližně i spojitou proměnu u náběhu a pod. úprav.

Protože text má sloužit k rychlé orientaci uživatelů, je zpracován v zásadě bez odkazů na literaturu.

## 3 Hlavní zásada řešení

Současné programy a metody řešení ortotropních desek řeší v podstatě jen tzv. fyzikálně ortotropní **deskové** (dvojměrné) kontinuum vyplněné body ve střednicové rovině desky  $(x, y)$ , tj. v rovině  $z = 0$ . Těleso reálné desky je omezeno horním a dolním lícem  $z = \pm h/2$ , je-li  $h$  tloušťka desky, případně proměnná, tj.  $h(x, y)$ . Předpokládá se, že hmotná normála k střednicové rovině, tj. např. body o souřadnicích  $(x_1, y_1, z)$ ,  $-h/2 \leq z \leq h/2$  zůstává i po průhybu desky přímá, nezkřivená. V klasické Kirchhoffově teorii desek zůstává dokonce kolmá k ohybové ploše desky  $w(x, y)$ ; respektujeme-li vliv příčného smyku  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  na úhlové změny  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , pak je tato normála obecně natočená kolem osy  $x$  a  $y$  o úhly  $\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$ . I v tomto obecnějším případě máme pro popis deformace deskového kontinua (Boltzmannovského u Kirchhoffovské desky a Cosseratovského u Mindlinovské desky) jen tři funkce dvou proměnných

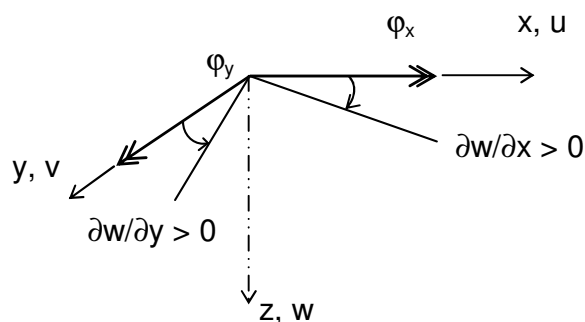
$$(2) \quad w(x, y), \quad \varphi_x(x, y), \quad \varphi_y(x, y).$$

U reálného trojrozměrného tělesa dané deskové konstrukce, např. komůrkového průřezu, je deformace úplně popsána třemi funkcemi tří proměnných

$$(3) \quad u(x, y, z), \quad v(x, y, z), \quad w(x, y, z),$$

z nichž lze odvodit také úplný popis její napjatosti  $\boldsymbol{\sigma}$ . Abychom mohli takové těleso řešit jako desku, musíme zavést nějaké geometrické předpoklady, které umožňují z funkcí (2) zjistit funkce (3). Např. nejjednodušší Kirchhoffův předpoklad, uvedený výše, má tento tvar (obr. 1):

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) &\rightarrow w(x, y) = w(x, y, 0) \\
 \varphi_x(x, y) &= \partial w(x, y) / \partial x \\
 (4) \quad \varphi_y(x, y) &= -\partial w(x, y) / \partial y \\
 u(x, y, z) &= -z \partial w(x, y) / \partial x \\
 v(x, y, z) &= -z \partial w(x, y) / \partial y
 \end{aligned}$$



Obr. 1

K popisu funkcí (3) stačí tu jediná funkce dvou proměnných  $w(x, y)$ .

Z toho plyne hlavní zásada řešení resp. převodu dané konstrukce na desku a naopak využití výsledků (tisků) získaných deskovým výpočtem pro dimenzování resp. posuzování dané konstrukce. Mezi funkcemi (2) a (3) musí být jednoznačná relace (nejjednodušší je typu (4)). Potom už není problém stanovit obdobné relace mezi vnitřními silami případně napětím konstrukce a jejího deskového modelu.

V podstatě jde tedy o redukci trojrozměrné úlohy na dvojrozměrnou.

## 4 Složky napětí u fyzikálně ortotropní desky

Pro stručnost se omezíme na nejčastější případ, kdy souřadnicové osy  $x, y$  jsou zvoleny v osách ortotropie, což se vždy doporučuje pro zjednodušení zápisu. Základem jsou obecné vztahy mezi složkami deformace a složkami napětí v primárním tvaru  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}_0 \boldsymbol{\sigma}$ :

$$(5) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & 0 & \\ \hline & 0 & & | & a_{44} & \\ & & & | & & a_{55} \\ & & & | & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Zavedeme tyto tzv. technické konstanty:

Tři moduly pružnosti (Youngovy):

$$(6) \quad E_1 = \frac{1}{a_{11}}, \quad E_2 = \frac{1}{a_{22}}, \quad E_3 = \frac{1}{a_{33}} \quad .$$

Tři smykové moduly pružnosti (Lamého):

$$(7) \quad G_{23} = \frac{1}{a_{44}}, \quad G_{31} = \frac{1}{a_{55}}, \quad G_{12} = \frac{1}{a_{66}} \quad .$$

Šest součinitelů příčné kontrakce (Poissonovy)  $\mu_{ik}$  pomocí těchto vztahů:

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= -\mu_{12} / E_1 \equiv a_{21} = -\mu_{21} / E_2 \\
 (8) \quad a_{13} &= -\mu_{13} / E_1 \equiv a_{31} = -\mu_{31} / E_3 \\
 a_{23} &= -\mu_{23} / E_2 \equiv a_{32} = -\mu_{32} / E_3
 \end{aligned}$$

Identity  $\equiv$  plynou ze symetrie  $a_{ik} = a_{ki}$ , takže z devíti konstant typu  $E, \mu$  je jen šest vzájemně nezávislých, což spolu se třemi konstantami  $G$  tvoří devět konstant typu  $E, G, \mu$ , které jsou nutné a stačí k popisu fyzikálních vlastností ortotropní látky uvažovaného typu. Osám  $x, y, z$  přísluší indexy 1, 2, 3. Součinitel  $\mu_{ik}$  je roven poměrné příčné kontrakci ve směru  $i$ , při tahu  $\sigma_k = E_2$  ve směru  $k$ . Indexy u smykových modulů lze zaměnit:  $G_{ik} = G_{ki}$ .

Fyzikální zákon (5) s technickými konstantami lze pro přehlednost rozepsat zvlášť pro normální a smykové složky (k tomuto rozpadu dojde jen v případě ortotropie):

$$(5a) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} - \frac{\mu_{12}}{E_1} - \frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\mu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} - \frac{\mu_{23}}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\mu_{31}}{E_3} - \frac{\mu_{32}}{E_3} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = D_\varepsilon^{-1} \sigma$$

Matice  $D_\varepsilon^{-1}$  má v každém řádku týž modul  $E$ . Je symetrická, takže se nezmění transpozicí. Lze tedy zapsat též tvar se stejnými moduly  $E$  ve sloupcích:

$$(5b) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} - \frac{\mu_{21}}{E_2} - \frac{\mu_{31}}{E_3} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{\mu_{13}}{E_1} \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} - \frac{\mu_{23}}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} - \frac{\mu_{23}}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = D_\varepsilon^{-1T} \sigma.$$

V úvahách a výpočtech používáme vždy tvar, který je v daném případě výhodnější, častěji to bývá tvar (5a).

U smykových složek je matice fyzikálních konstant diagonální:

$$(5c) \quad \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \gamma = D_\gamma^{-1} \tau.$$

Je tedy snadné zapsat i obrácený vztah:

$$(5d) \quad \tau = D_\gamma \gamma, \quad D_\gamma = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Obrácený vztah k (5a) je v technických konstantách méně přehledný; U ortotropních desek se však značně zjednoduší, protože se vyjde ze základního statického předpokladu deskové teorie:

$$(5e) \quad \sigma_z(x, y, z) \equiv 0.$$

V tomto případě se vztah (5a) rozpadne na dva jednodušší:

$$(5f) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{12}}{E_1} \\ -\frac{\mu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$(5g) \quad [\varepsilon_z] = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_{31}}{E_3} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}.$$

Složku  $\varepsilon_z$  můžeme považovat za nepodstatnou a z dalších úvah ji vynecháme což platí i pro ortotropii. Na rozdíl od isotropie lze dokonce definovat materiál s nenulovou příčnou kontrakcí v rovině  $(x, y)$ , ale s nulovými  $\mu_{31}, \mu_{32}$ , nebo s  $E_3 \rightarrow \infty$  a splnit přesně podmínku  $\varepsilon_z \equiv 0$  při  $\sigma_z \equiv 0$ . Nemá to však praktický význam.

Vztah (5f) lze již snadno invertovat, čímž dospíváme k úplné relaci  $\sigma = D \varepsilon$  typu (5,1) = (5,5) (5,1) mající u desek tvar (9), uspořádáme-li složky tak, jak je to u desek účelné:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \frac{\mu_{21}E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 & & \\ \frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 & & \\ 0 & 0 & G_{12} & & \\ \hline & & & G_{13} & 0 \\ & & & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

## 5 Vnitřní síly u fyzikálně ortotropní desky

### 5.1 Technická teorie desek bez vlivu příčného smyku

Jde o tzv. klasickou Kirchhofovou teorii tenkých desek, založenou na vztazích (4) a platnou orientačně v mezích

$$(10) \quad |w_m| \leq \frac{L}{c}, \quad C \approx 100,$$

$$(11) \quad h \leq \frac{L}{5}.$$

kde značí:

$w_m$	- extrémní průhyb desky,
$h$	- tloušťku desky,
$L$	- charakteristický půdorysný rozměr desky, $L$ = průměr kruhové desky, $L$ = menší strana obdélníkové či kosodélníkové desky apod.

Následky nesplnění (10):

Ve střednicové rovině desky začnou vznikat podstatná napětí, k deskové napjatosti se přičítá stěnová (rovinná) napjatost. Jde o desky s velkými průhyby, geometricky nelineární. V limitě  $h \rightarrow 0$  vznikají jen tahová napětí, deska přechází v taženou membránu (fólie pneumatických staveb, prostorová geometricky nelineární úloha).

Následky nesplnění (11):

Pro  $h > L/5$  nastává přechod k tlustým deskám s výrazným vlivem příčného smyku na celkovou energii, deformaci a napjatost desky, viz odst. 5.2 a 6.3.

Při platnosti (10), (11) zavedeme tyto vnitřní síly: Ohybové momenty (index = směr výztuže) v  $[\text{Nm/m}]$ :

$$(12) \quad M_x = \int \sigma_x z \, dz, \quad M_y = \int \sigma_y z \, dz.$$

Kroutící momenty v  $[\text{Nm/m}]$ :

$$(13) \quad M_{xy} = M_{yx} = \int \tau_{xy} z \, dz.$$

Posouvající síly v  $[\text{N/m}]$ :

$$(14) \quad T_x = \int \tau_{xz} \, dz, \quad T_y = \int \tau_{yz} \, dz.$$

Integruje se po tloušťce desky v intervalu  $-h/2 \leq z \leq h/2$ . S použitím hypotézy (4), geometrických vztahů

$$(15) \quad \epsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$$

fyzikální vazby (9) a podmínek momentové rovnováhy prvku desky kolem osy  $x$  a  $y$  vyjde vztah (1) ve tvaru:

$$(16) \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & & \\ D_{21} & D_{22} & 0 & & \\ 0 & 0 & D_{33} & & \\ \hline & & & D_{11} & D_3 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & D_{22} & D_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \\ w_{xxx} \\ w_{yyx} \\ w_{yyy} \\ w_{xxy} \end{bmatrix}$$

s těmito členy matice tuhosti **D**:

Ohybové tuhosti:

$$(17) \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})}.$$

Kontrakční tuhost:

$$(18) \quad D_{12} = \mu_{21} D_{11} \equiv D_{21} = \mu_{12} D_{22},$$

Torsní tuhost:

$$(19) \quad D_{33} = G_{12} \frac{h^3}{12}.$$

Smíšená tuhost:

$$(20) \quad D_3 = 2D_{33} + D_{12} = 2D_{33} + D_{21}.$$

Celkem potřebujeme pro matici  $D$  pět údajů:  $h$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\mu_{12}$ , druhý součinitel příčné kontrakce ve směru  $x$  při roztažení ve směru  $y$  je

$$(21) \quad \mu_{21} = \mu_{12} \frac{E_2}{E_1} = \mu_{12} \frac{D_{22}}{D_{11}}.$$

Tento počet lze snížit na čtyři, jestliže předpokládáme, že pro smykový modul  $G_{12}$  platí obdobná relace jako u isotropie – viz dále (39), ale pro geometrické průměry (jiné odvození podal již M.T. Huber):

$$(22) \quad G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\mu_{12} \mu_{21}})}.$$

Pak není torsní tuhost  $D_{33}$  nezávislou konstantou, ale je podle (19) a (17),

$$(23) \quad D_{33} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\mu_{12} \mu_{21}}) \sqrt{D_{11} D_{22}},$$

což lze pomocí (21) zapsat též v těchto tvarech:

$$(24) \quad \begin{aligned} D_{33} &= \frac{1}{2} (1 - \mu_{12} \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}}) \sqrt{D_{11} D_{22}}, \\ D_{33} &= \frac{1}{2} (1 - \mu_{21} \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}) \sqrt{D_{11} D_{22}}. \end{aligned}$$

Výraz (20) je součinitelem při smíšené derivaci v základní deskové rovnici

$$(25) \quad D_{11} w_{xxxx} + 2D_3 w_{xxyy} + D_{22} w_{yyyy} = p$$

a je směrodatný pro tzv. druh ortotropie, určený konstantou



$$(26) \quad \kappa = \frac{D_3}{\sqrt{D_{11} D_{22}}}.$$

Ve stavební praxi je obvyklý také druh ( $0 \leq \kappa < 1$ ) nebo i 2. druh ( $\kappa = 1$ ), který lze redukovat na isotropní řešení. 3. druh ( $\kappa > 1$ ) se může vyskytnout jen vzácně u ocelových desek s torsně tuhými uzavřenými žebry.

Konstantu ortotropie  $\kappa$  lze u některých druhů desek považovat za primární, prakticky ověřený údaj, který reprezentuje smíšenou tuhost desky  $D_3 = \kappa \sqrt{D_{11} D_{22}}$ . Potom ke z (20) a (23) určit kontrakční tuhost ve tvaru

$$(27) \quad D_{12} = D_3 - 2D_{33} = (\kappa - 1 + \sqrt{\mu_{12} \mu_{21}}) \sqrt{D_{11} D_{22}}.$$

V běžném případě  $\kappa = 1$  je

$$(28) \quad D_{12} = \sqrt{\mu_{12} \mu_{21}} \sqrt{D_{11} D_{22}} \quad (\text{isotropie } D_{12} = \mu D_{11}).$$

Reakce desky  $Q_x, Q_y$  jsou rovny posouvajícím silám  $T_x, T_y$  (tak jako u nosníků) jen když jsou na okraji kroutící momenty  $M_{xy}$  nulové (např. na dokonale vetknutém okraji). Obecně (např. na prostě podepřeném okraji) nutno přičíst doplněk od kroucení:

$$(29) \quad Q_m = T_m + \partial M_{mn} / \partial n,$$

kde  $m \perp n$  je buď  $x \perp y$  nebo  $y \perp x$  nebo libovolný jiný směr okraje  $n$  s normálou  $m$ . Nejsou-li programem reakce tištěny, vypočtou se z tištěných hodnot, při čemž derivace se zjistí přibližně ze dvou sousedních hodnot, např. ve sledu ekvidistantních hraničních bodů 1, 2, 3 při kroku  $d$ :

$$(30) \quad Q_x(2) = T_x(2) + [M_{xy}(3) - M_{xy}(1)] : 2d$$

## 5.2 Desky s vlivem příčného smyku

V klasické teorii desek podle předešlého odst. se neuplatní smykové moduly  $G_{13}, G_{23}$  z (9), protože posouvající síly (14) se zjišťují z podmínek momentové rovnováhy prvku, což vede na poslední dva řádky matice (16). U tlustých desek, přibližně v rozsahu

$$(31) \quad L/5 < h < L,$$

dochází ke zkosení  $\gamma$  pravého úhlu mezi hmotnou normálou a střednicovou rovinou vlivem příčného smyku  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  a z hypotézy (4) odpadne 2. a 3. řádek. Máme pak tři nezávislé funkce  $w, \varphi_x, \varphi_y$  podle (2). V tomto případě se uplatní vztahy

$$(32) \quad \begin{aligned} \gamma_{xz} &= w_x + \varphi_y \\ \gamma_{yz} &= w_y - \varphi_x \end{aligned}$$

a 4. a 5. řádek matice (9), takže místo matice (16) pracujeme s maticí:

$$(33) \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & & \\ D_{21} & D_{22} & 0 & & \\ 0 & 0 & D_{33} & & \\ \hline & & & D_{44} & 0 \\ & & & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \\ w_x + \varphi_y \\ w_y - \varphi \end{bmatrix}$$

s novými členy, které v nejjednodušším případě konstantního příčného smyku po tloušťce desky  $h$  mají tvar:

$$(34) \quad D_{44} = G_{13} h, \quad D_{55} = G_{23} h,$$

takže k pěti údajům  $h, E_1, E_2, G_{12}, \mu_{12}$  přistupují dva další:  $G_{13}, G_{23}$ , celkem sedm údajů pro výpočet vstupních dat  $\mathbf{D}$ .

## 6 Tvarově ortotropní desky

### 6.1 Hlavní zásady převodu na fyzikální ortotropii

Některé mostní, stropní, základové aj. konstrukce se podobají deskám ve smyslu hypotézy (11), tj. jejich celková „tloušťka“  $h$  je malá vzhledem k půdorysným rozměrům  $L$ . Při tom však jde o tělesa obecnějšího tvaru, např. žebrované desky, žaluziové desky z prefabrikátů, desky vylehčené komůrkami, desky s různou měkkou i tuhou výztuží, např. se zabetonovanými I nosníky, vlnovky, příhradové desky apod. Jen velmi zřídka je celková ohybová tuhost těchto útvarů v podélném směru  $x$  i příčném směru  $y$  stejná, zpravidla se tyto tuhosti značně až řádově liší a to ne vlivem různých modulů  $E_1, E_2$ , ale vlivem různého průřezu rovinami  $x = \text{konstanta}$ . Jde tedy o **tvarově** (ne fyzikálně) ortotropní desky ve smyslu tvarové resp. technické ortotropie. Pro vyšetření **globálního chování** těchto desek (bez detailní analýzy napětí v okolí staticky, geometricky či fyzikálně singulárních bodů aj. nepravidelností způsobených skutečnou prostorovou povahou útvaru) lze použít metod a programů, zpracovaných pro fyzikálně ortotropní desky za těchto předpokladů:

- a) Z deskové ohybové plochy  $w$  (nebo ze tří funkcí (2) u desek s vlivem smyku) musí být jednoznačně odvoditelné složky posunutí  $u, v, w$  (3) v celém řešeném útvaru, tedy také jeho složky deformace  $\epsilon$  a napětí  $\sigma$ , případně vnitřní síly, působící na řez libovolné jeho části. K tomu je nutno zavést vhodné geometrické hypotézy, jako byla např. (4), ověřené co do výstižnosti různými úvahami, experimentálně praktickými zkušenostmi apod.
- b) Na základě hypotéz a) nutno jednoznačně pro každý typ tvarově ortotropní desky stanovit:
  - b1) VSTUP: Konstanty  $D_{ik}$  v matici fyzikálních konstant  $\mathbf{D}$  u fyzikálně ortotropní desky, která nahradí ve výpočtu danou desku.
  - b2) VÝSTUP: Způsob dalšího využití tisků vnitřních sil náhradní fyzikálně ortotropní desky pro dimenzování a posuzování dané tvarově ortotropní desky, tj. jaké vnitřní síly, resp. napětí v dané desce vznikají.

Přesná analýza splnění předpokladů a) a výstižnosti resp. technické upotřebitelnosti výsledků by vyžadovala porovnání s přesným prostorovým řešením skutečné konstrukce alespoň v několika typických resp. limitních případech, nebo se spolehlivým experimentálním měřením.

Toto je k dispozici jen u některých případů, např. u ocelových desek s žebry apod.; pak se ve vstupech b 1) pracuje s podrobnějšími údaji o skladbě průřezu desky. Většinou však taková analýza není provedena a ke srovnání může sloužit jen nějaká opět přibližná metoda, např. u komůrkových průřezů desek, což ovšem není průkazem, protože není spolehlivě známa odchylka od exaktního řešení. Vzhledem k řadě faktorů, ovlivňujících vlastnosti stavebních konstrukcí, lze pro přibližné výpočty akceptovat některé osvědčené formule, které dále doplníme novějšími úvahami zejména pokud jde o torzní tuhost.

## **6.2      Jednoduché typy ortotropních desek**

### **6.2.1    Energetická ekvivalence průřezových charakteristik**

V odst. 6.2 probereme desky, u nich lze zanedbat vliv příčného smyku a které v celém rozsahu splňují klasickou Kirchhofovu hypotézu (4). Prakticky jde o běžné, nepříliš tlusté desky, které jsou žebrovány, zvlněny či jinak vyztuženy ve dvou směrech  $x \perp y$ , shodných se zvolenými směry souřadnic (např. [1], str.37, obr.9).

Při převodu na fyzikálně ortotropní desku, tj. při výpočtu konstant  $D_{ik}$  v matici tuhosti  $\mathbf{D}$  (16), nutno dodržet zásadu ekvivalence potenciální energie vnitřních sil skutečného a náhradního tělesa. U probíraných desek je to výraz tvaru

$$(35) \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \iint [M_x (-w_{xx}) + M_y (-w_{yy}) + M_{xy} (-w_{xy}) + M_{yx} (-w_{yx})] dx dy$$

což je integrál ze součinů, vyjadřujících jen práci momentů (obdobně jako u štíhlého ohýbaného a krouceného prutu) na křivostech, které jsou při malých průhybech  $w$  vyjádřeny druhými derivacemi. Při řešení náhradní desky MKP bude všude (nebo s výjimkou útvarů o nulové plošné míře) 2. smíšená derivace spojitá a platí rovnost

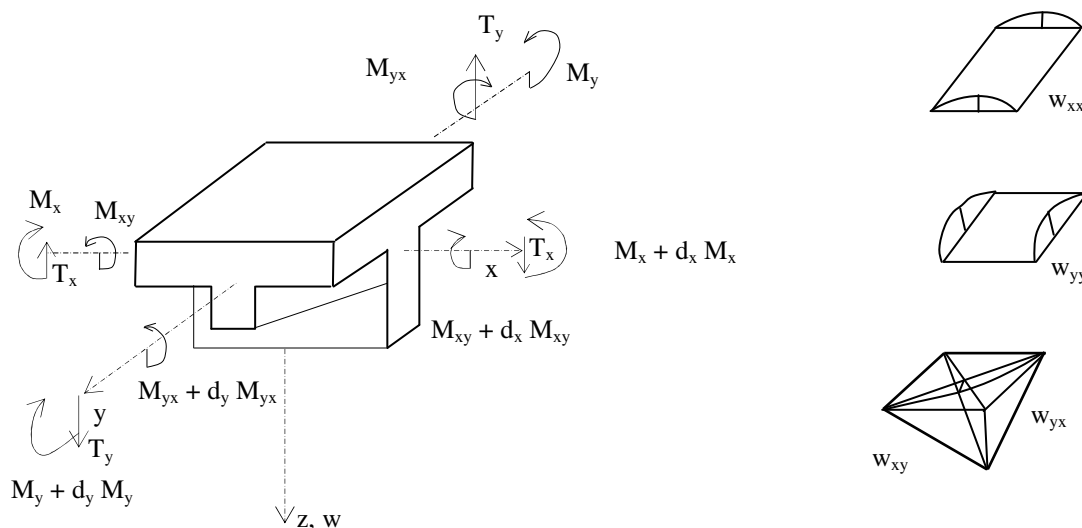
$$(36) \quad w_{xy} = w_{yx} \quad .$$

Stejně tak bude v náhradní desce platit věta o vzájemnosti krouticích momentů:

$$(37) \quad M_{xy} = M_{yx} \quad ,$$

takže (29) se zjednodušuje na tvar:

$$(38) \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \iint [M_x (-w_{xx}) + M_y (-w_{yy}) + 2M_{xy} (-w_{xy})] dx dy.$$



Obr. 2

Kladný smysl všech veličin je zobrazen na obr. 2. Srovnávací hladinou ( $\Pi_i = 0$ ) je prvotní nedeformovaný stav.  $\Pi_i$  je vždy kladná.

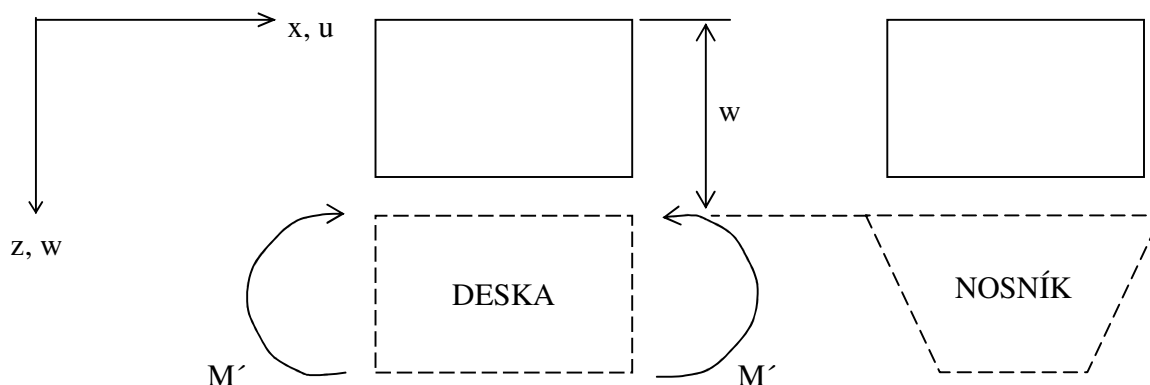
Mějme nyní systém dvou osnov prutů souběžných s osou  $x$  a  $y$  s ohybovými tuhostmi  $(E'J)_x$ ,  $(E'J)_y$  torsními tuhostmi  $(GJ_k)_x$ ,  $(GJ_k)_y$ , vykazující ohybové křivosti  $\kappa_x = w_{xx}$ ,  $\kappa_y = w_{yy}$  a poměrné zkroucení  $\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y$ . Potenciální energie ohybových a krouticích momentů tohoto systému je

$$(39) \quad \Pi_i = \frac{1}{2} \sum \int \left[ (E'J)_x \kappa_x^2 + (E'J)_y \kappa_y^2 + (GJ_k)_x \vartheta_x^2 + (GJ_k)_y \vartheta_y^2 \right] ds.$$

Porovnáním (39) a (35) plynou – zatím jen formálně – tyto vztahy pro pruhy desky jednotkové šířky  $d_x = 1$  nebo  $d_y = 1$ :

$$(40) \quad \begin{aligned} M_x &= -(E'J)_x w_{xx}, & M_y &= -(E'J)_y w_{yy} \\ M_{xy} = M_{kx} &= -(GJ_k)_x \vartheta_x, & M_{yx} = M_{ky} &= -(GJ_k)_y \vartheta_y \end{aligned}$$

Protože v kompaktní desce nemůže volně probíhat příčná kontrakce a dilatace průřezů prvků (obr. 3),



Obr. 3

jsou pruhy desky ohybově poněkud tužší než nosníky. To lze zahrnout do hmoty modulu pružnosti, takže např. u izotropní desky pracujeme s modulem

$$(41) \quad E^i = \frac{E}{1-\mu^2},$$

což vyjde z přesných vztahů mezi  $\sigma$  a  $\epsilon$ . Dále je z obr. 3 patrné, že příčné kontrakci průřezu zabrání u desek jisté příčné momenty  $M'$ . Např. u izotropních desek při ohybu momenty  $M_y$  do válcové plochy  $w(y)$  vzniknou příčné momenty

$$(42) \quad M' = M_x = \mu M_y$$

a obdobně při ohybu  $M_x$  do plochy  $w(x)$ :

$$(43) \quad M' = M_y = \mu M_x.$$

Tento efekt zmizí u materiálu bez příčné kontrakce ( $\mu = 0$ ).

Prozkoumejme, k čemu vedou formální vztahy (40) až (43) u izotropní desky tloušťky  $h \ll 1$ , takže je

$$(44) \quad J_x = J_y = \frac{1}{12} h^3, \quad J_{kx} = J_{ky} = \frac{1}{3} h^3.$$

Využijme také známou relaci pro smykový modul

$$(45) \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

a označme známou deskovou konstantu

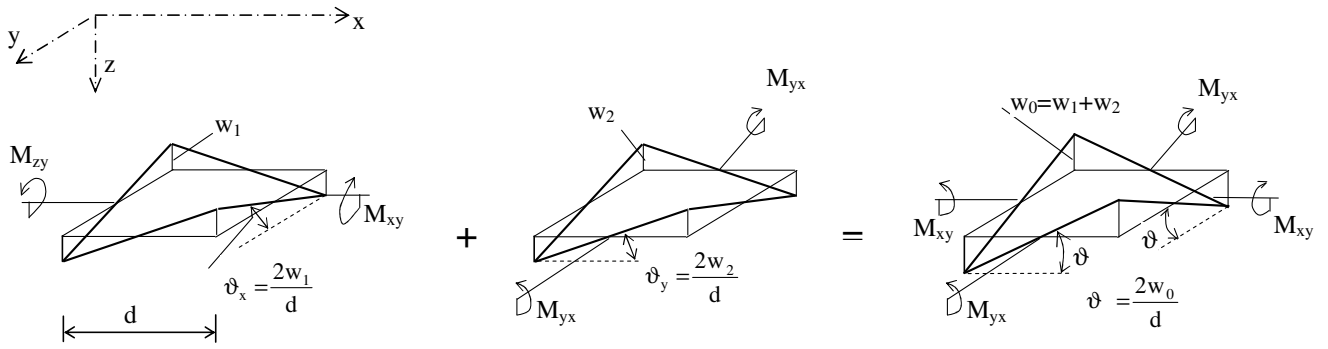
$$(46) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Dostaneme vztahy mezi momenty a křivostmi

$$(47) \quad \begin{array}{l} 2) \quad M_y = -D(w_{yy} + \mu w_{xx}), \\ 1) \quad M_x = -D(w_{xx} + \mu w_{yy}) \end{array}$$

které plně souhlasí se vztahy, odvozenými z hypotézy (4). Dále uvažme podle obr. 4, že celkové zkroucení  $\vartheta$  (přesněji torsní křivost) prvku desky ovlivňují oba páry zkrucujících momentů, takže je

$$(48) \quad \vartheta = \vartheta_x + \vartheta_y.$$



Obr. 4

V desce je spojitá smíšená derivace  $w_{xy} = w_{yx} = \vartheta$  (viz též obr. 2), prvek desky je zdeformován do zborcené přímkové plochy typu hyperbolického paraboloidu  $w(x, y) = \frac{2}{d} \vartheta x y$  v lokálních souřadnicích  $x, y$  s počátkem ve středu prvku, takže v rozích  $x = \pm \frac{d}{2}$ ,  $y = \pm \frac{d}{2}$  vychází  $w = \pm w_0$ . Podle (40) platí pak obecně vztah

$$(49) \quad \vartheta = w_{xy} = - \left( \frac{M_{xy}}{(GJ_k)_x} + \frac{M_{yx}}{(GJ_k)_y} \right)$$

a u izotropních desek při

$$(50) \quad M_{kx} = M_{ky} = M_{xy} = M_{yx}, \quad (GJ_k)_x \equiv (GJ_k)_y = GJ_k : \\ w_{xy} = -2 \frac{M_{xy}}{GJ_k}, \quad M_{xy} = -\frac{1}{2} GJ_k w_{xy}.$$

Po dosazení podle (44) a (45), znásobení jednotkou ve tvaru  $\frac{1-\mu}{1-\mu}$  a využití vztahu

$(1+\mu)(1-\mu) = (1-\mu^2)$  dostaneme

$$(51) \quad M_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{h^3}{3} w_{xy} \frac{(1-\mu)}{(1-\mu)} = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (1-\mu) w_{xy} = -D(1-\mu) w_{xy},$$

což je stejný vzorec, jaký vychází přesným postupem (integrací  $\tau_{xy}$ ) z hypotézy (4).

Nosníková úvaha o fyzikálních konstantách desky vede tedy na správnou matici tuhosti **D** izotropní desky. Můžeme ji podle (16) nebo (33), (47) a (51) zapsat ve tvaru obvyklém v MKP:

$$(52) \quad \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{bmatrix}.$$

Lze tedy očekávat, že taková úvaha nebude principiálně, tj. co do podmínek rovnováhy a spojitosti, závadná ani u jednoduchých desek tvarově ortotropních, což také potvrzují dosavadní zkušenosti z experimentů a praxe.

## 6.2.2 Ohybové a kroutící momenty

Tyto veličiny mají u desek rozměr síly, nebo výstižněji síly  $\times$  délky na jednotku šířky řezu deskou. V hlavních jednotkách SI je to N (newton) nebo Nm/m (newtometr na metr šířky). Převod na dříve užívané jednotky:

$$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N} = 10 \text{ N}$$

$$1 \text{ Mp} = 10^4 \text{ N} = 10 \text{ kN}$$

Všechny průřezové charakteristiky  $J_x, J_y, J_{kx}, J_{ky}$  nutno počítat buď pro jednotku šířky řezu, nebo pro jinou šířku řezu  $b$ , např. vzdálenost žebër nebo rozměr prvku dělení a pak šířkou  $b$  výsledek dělit. Rozměr  $J$  vyjde tedy v  $[\text{m}^3]$ .

### 6.2.2.1 Deska bez příčné kontrakce

Sem patří prakticky všechny žebrované desky s otevřeným žebrováním (ne komůrkové), protože ohybová tuhost je u nich převážně ovlivněna žebry a ta se vzájemně příčně neovlivňují žádnou spojitou kontrakcí. Také u železobetonových desek se slabým žebrováním, zejména po vzniku vlasových trhlinek v tažené části betonu, je tzv. efektivní hodnota  $\mu$  velmi malá (např. 0,02) a výpočty při  $\mu = 0$  výstižné. Matice fyzikálních konstant je pak diagonální, protože  $D_{12} = D_{21} = 0$  viz (28). Zbývá tedy určit jen  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$ .

Prvé dvě ohybové konstanty jsou celkem nesporné a podle (40) je vypočteme ze vzorců

$$(53) \quad D_{11} = (EJ)_x, \quad D_{22} = (EJ)_y, \quad [\text{Nm}].$$

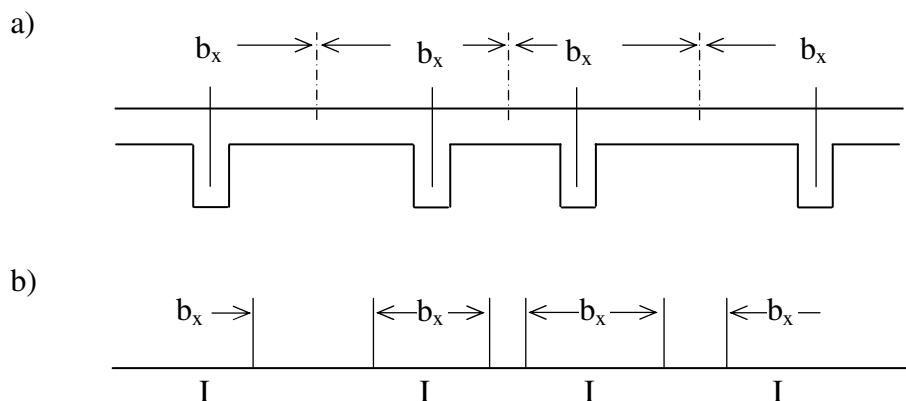
Vzorce zahrnují i případnou různost  $E_x \neq E_y$   $[\text{Nm}^{-2}]$ .  $J_x, J_y$   $[\text{m}^3]$  se vztahují na jednotku šířky řezů rovinami  $x = \text{konstanta}$ ,  $y = \text{konstanta}$ . Pro nejčastější případ  $E_x = E_y = E$  a při výpočtu  $J_{xb}, J_{yb}$   $[\text{m}^4]$  pro žebra s určitou spolupůsobící šířkou  $b_x, b_y$  desky.

$$(54) \quad D_{11} = \frac{EJ_{xb}}{b_x}, \quad D_{22} = \frac{EJ_{yb}}{b_y}.$$

Je-li deska tloušťky  $h$  žebrovaná jen ve směru  $x$ , je

$$(55) \quad D_{22} = \frac{Eh^3}{12}$$

Za spolupůsobící šířku  $b_x, b_y$  lze vzít u běžných betonových desek s žebry ve směru  $x$  i  $y$  pro účely tohoto výpočtu prakticky vždy plnou vzdálenost podle obr. 5a.



Obr. 5

Jen u tenkých desek, např. u ocelových ortotropních mostovek, projeví se výrazněji snížení  $b_x, b_y$  podle platných norem (obr. 5b). Nutno však přihlídnout ke skutečné povaze zatížení desky aj. okolnostem a neaplikovat normový vzorec, platný spíše pro zjišťování napětí, ne náhradní ohybovou tuhost. V nejistých případech  $b_x, b_y$  se doporučuje zvláštní konzultace s autorem tohoto návodu.

Třetí konstanta, torzní  $D_{33}$ , je problematičtější, ale ve většině případů se lze spokojit s výrazem, plynoucím při  $\mu = 0$  z (24).

$$(56) \quad D_{33} = \frac{1}{2} \sqrt{D_{11} D_{22}},$$

který pro isotropii a  $\mu = 0$  přejde ve správnou hodnotu  $\frac{1}{2} D$ , viz (52). Tomu pak přísluší v tisku výsledků jeden kroutící moment  $M_{xy}^F = M_{yx}^F$  náhradní fyzikálně ortotropní desky

$$(57) \quad M_{xy}^F = M_{yx}^F = -D_{33} \cdot 2 w_{xy} = -\sqrt{D_{11} D_{22}} w_{xy}.$$

Rovnost  $M_{xy}^F = M_{yx}^F$  je důsledek věty o vzájemnosti smykových napětí  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (obr. 6a), která musí na svislé hraně prvku desky platit i u tvarově ortotropních desek, ale obecně u nich neimplikuje rovnost kroutících momentů, jak plyne názorně z obr. 6b. Kroutící momenty se získají z toku smykových napětí integrací po průřezu rovinami  $x = \text{konstanta}$  a  $y = \text{konstanta}$ :

$$(58) \quad M_{xy} = \iint_{F_x} \tau_{xn} r dF_x = -D_{33x} \cdot 2 w_{xy},$$

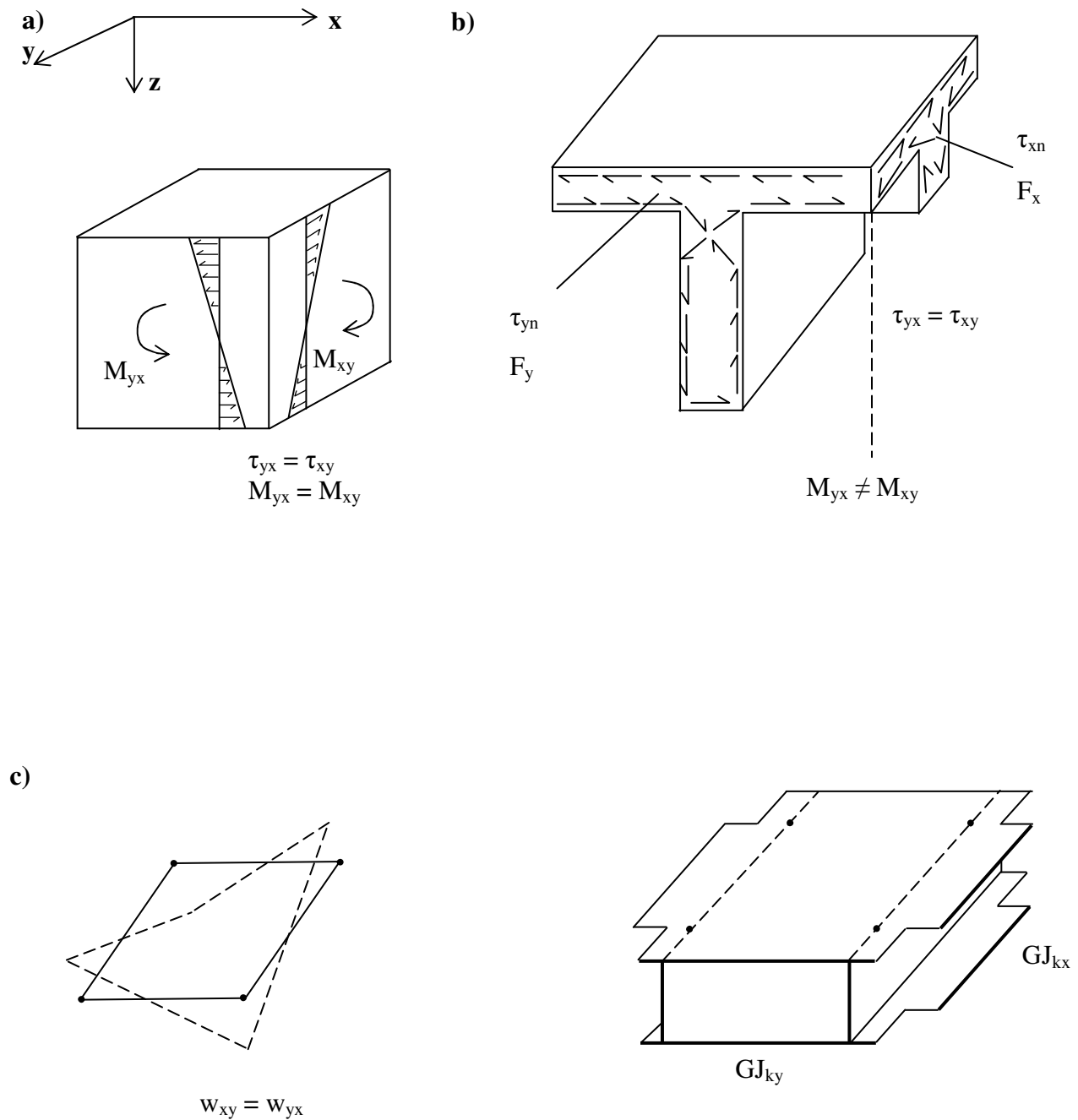
$$(59) \quad M_{yx} = \iint_{F_y} \tau_{yn} r dF_y = -D_{33y} \cdot 2 w_{yx}.$$

K přesné aplikaci vzorců (58 a 59) bychom museli znát přesný průběh smykového toku po průřezech dané tvarově ortotropní desky. To je dosti obtížná prostorová úloha, která by vyžadovala značně náročnou aplikaci MKP. Proto uveďme nejprve přibližný technický výpočet, vycházející z odhadu torzních tuhostí pruhů desky jako nosníků v roštu bez kontinuální souvislosti. Protože  $w_{xy}$  je u desky spojitá funkce, platí  $w_{xy} = w_{yx}$  (obr. 6c) a srovnávací nosníky mají též poměrný úhel zkroucení, takže je poměr momentů (58) a (59).



$$(60) \quad \frac{M_{xy}}{M_{yx}} = \frac{(GJ_k)_x}{(GJ_k)_y}.$$

Mezi momentem (57) a momenty (58), (59) zavedme součtový vztah, který není v rozporu s isotropním případem; plyne porovnáním výrazů pro energii (35) a (38) při spojitě smíšené derivaci funkce  $w$ , kdy musí platit  $w_{xy} = w_{yx}$ :



Obr. 6

$$(61) \quad M_{xy} + M_{yx} = 2M_{xy}^F.$$

Tím dospějeme k těmto hodnotám:

$$(62) \quad M_{xy} = \frac{(GJ_k)_x}{(GJ_k)_x + (GJ_k)_y} 2M_{xy}^F, M_{yx} = \frac{(GJ_k)_y}{(GJ_k)_x + (GJ_k)_y} 2M_{xy}^F.$$

Dosaďme (62) do vzorce (49); dostaneme vztah

$$w_{xy} = -\frac{4M_{xy}^F}{(GJ_k)_x + (GJ_k)_y}$$

Porovnáním se vzorcem (57)

$$w_{xy} = -\frac{M_{xy}^F}{2D_{33}}$$

vychází vztah, podle něhož budeme počítat vstupní údaj  $D_{33}$ , tj. torzní tuhost náhradní fyzikálně ortotropní desky.

$$(63) \quad D_{33} = \frac{1}{8}[(GJ_k)_x + (GJ_k)_y].$$

Veličiny  $J_k$  [ $m^3$ ] se vztahují na jednotkovou šířku řezu. Zpravidla se počítají pro jinou vhodnou šířku (prutový průřez)  $b$ , takže je pak  $J_k = J_{kb}$  [ $m^4$ ] :  $b$  [ $m$ ].

Nedostatkem tohoto postupu je skutečnost, že v desce nemůže dojít k čistému Saint Venantovskému kroucení pruhů ve směru  $x$  a  $y$ , neboť:

- a) plášť těchto pruhů nemá všude nulové povrchové smykové napětí (na svislých stěnách pláště je  $\tau \neq 0$ )
- b) průřezy pruhů nemohou volně deplanovat.

U slabších desek se silnějšími žebry nevznikají příliš velké odchylky. V jiných případech je postup přijatelný, je-li všude  $|M_{xy}| < |M_x, M_y|$ . Pokud bychom veličiny  $J_k$  počítali na základě správného smykového toku (58), (59), bude postup vždy přijatelný. Mimořádné případy, např. desky se zabetonovanými I nosníky apod. odkazujeme na speciální konsultace.

Pro přibližné výpočty běžných konstrukcí stačí použít pro  $D_{33}$  vzorec (56), který nevyžaduje zjišťování torzních tuhostí. Lze dokázat, že jak vzorec (56), tak i pozdější vzorec (72) pro desky s příčnou kontrakcí jsou v případě isotropní desky identické se vzorcem (63), viz úvaha v odst. 6.21 za vzorcem (44). Obecně platí podle (61)

$$(63a) \quad D_{33} = \frac{1}{2}(D_{33x} + D_{33y})$$

a v našem zjednodušení je

$$D_{33x} = \frac{1}{4}(GJ_k)_x, D_{33y} = \frac{1}{4}(GJ_k)_y.$$

Připomeňme ještě, že první index při  $\tau$  i  $M$  značí vždy plochu (řez  $x = \text{konstanta}$ ), na niž  $\tau$  či  $M$  působí. Moment  $M_{xy}$  zkrucuje tedy pruhy desky, rovnoběžné s osou  $x$ , moment  $M_{yx}$  pruhy, rovnoběžné s osou  $y$ . Viz též obr. 4, kde je patrný kladný smysl těchto momentů. Dva zvláštní případy vzorců (62) :

a) Deska se stejnou torzní tuhostí ve směru  $x$  i  $y$ , tj.

$J_{kx} = J_{ky}$  má  $M_{xy} = M_{yx} = M_{xy}^F$  tištěná hodnota kroutícího momentu.

b) Deska s výraznou torzní tuhostí jen v jednom směru, způsobenou např. silnými torzně tuhými žebry v jediném směru – označme jej  $x$ . Je charakterizována silnou nerovností  $J_{ky} \ll J_{kx}$ . U takové desky poskytnou vzorce (61) a (63) hodnoty

$$M_{xy} \cong 2 M_{xy}^F, M_{yx} \cong 0,$$

takže kroutící moment ve směru  $x$  je dvojnásobek tištěného momentu a ve směru  $y$  je nulový.

Skutečný stav je mezi limitami typu a), b). Pokud jde o tzv. dimenzovací momenty, které jsou v tiscích obsaženy hodnotami

$$(64) \quad M_{x \text{ dim}}^F = (\text{sign. } M_x^F) (|M_x^F| + |M_{xy}^F|),$$

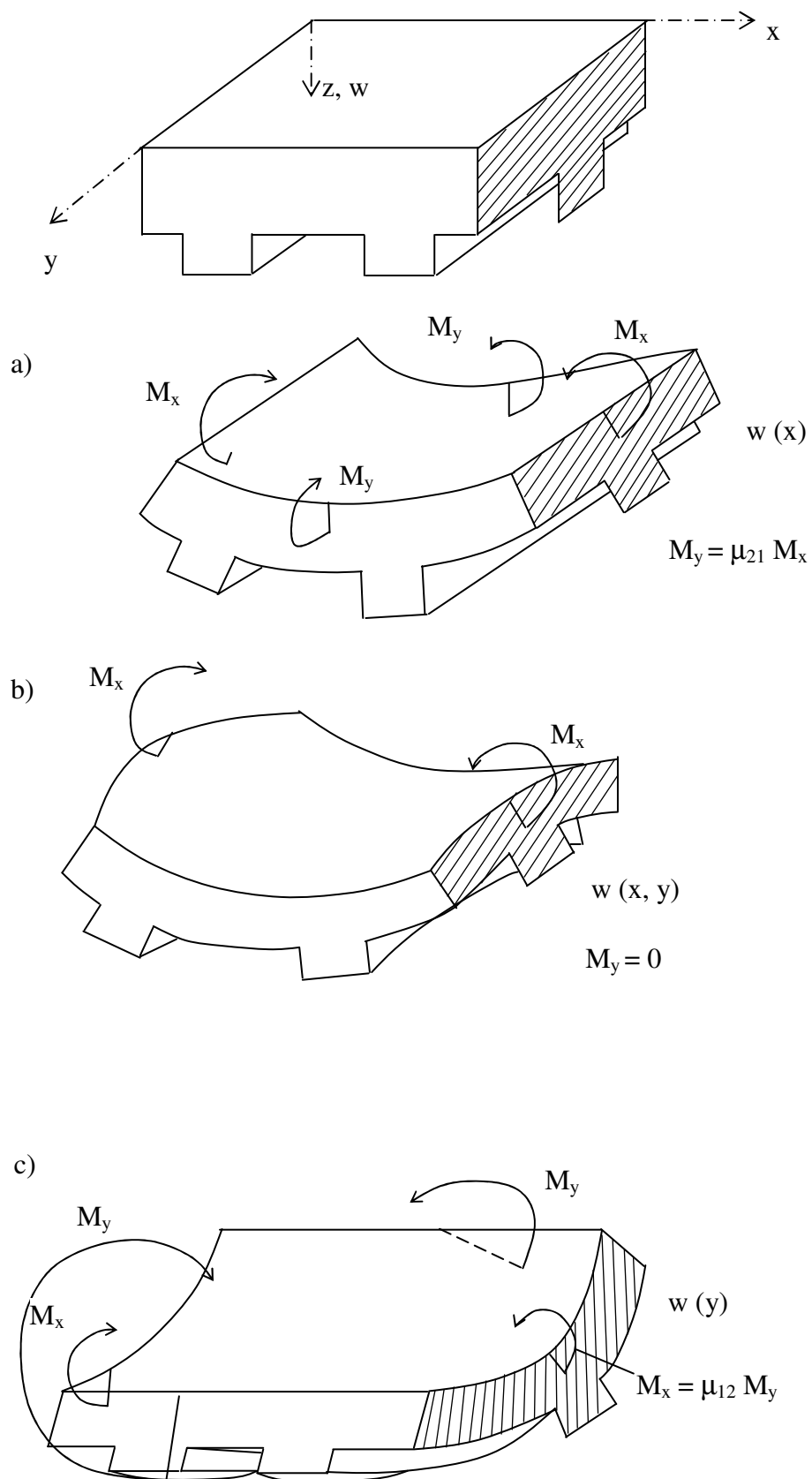
$$M_{y \text{ dim}}^F = (\text{sign. } M_y^F) (|M_y^F| + |M_{xy}^F|),$$

Nutno uvážit, že je sice  $M_x = M_x^F$ ,  $M_y = M_y^F$

(index  $F$  značí stále fyzikálně ortotropní desku, na níž vlastně celý výpočet probíhá), ale  $M_{xy}^F$  je jen formální hodnota. Použití veličin (64) je tedy vhodné pro případy, blížící se limitě typu a). Jinak by byla na místě korekce ve smyslu vzorců (61) či (63).

### 6.2.2.2 Desky s příčnou kontrakcí.

Součinitelům příčné kontrakce u tvarově ortotropních desek lze podle (16) až (18) přisoudit tento názorný význam (obr.7) :



Obr. 7

Zdeformujeme prvek desky na obr. 7a do tvaru příslušného válcové ploše  $w(x)$  s konstantní křivostí  $w_{xx}$ . Pak je  $w_{yy} = 0$  a podle (16) jsou k tomu potřebné momenty.

$$(65) \quad M_x = -D_{11}w_{xx}, \quad M_y = -D_{21}w_{xx} = \mu_{21}M_x.$$

Kdybychom zatěžovali prvek pouze momenty  $M_x$ , vznikl by stav podle obr.7b, protože ze 2.řádku (16) plyne při  $M_y = 0$  podmínka

$$D_{21}w_{xx} + D_{22}w_{yy} = 0,$$

takže by se prvek zakřivil také ve směru  $y$ , a to konstantní křivostí  $w_{yy} = -D_{21}w_{xx} / D_{22} = -\mu_{12}w_{xx}$ . K vyvolání téže křivosti  $w_{xx}$  by stačil menší moment

$$M_x = -D_{11}(1 - \mu_{21}\mu_{12}) w_{xx}.$$

Podobně je k vyvození válcového ohybu prvku  $w(y)$  ve směru  $y$  (obr.7c) zapotřebí momentů

$$(66) \quad M_y = -D_{22}w_{yy}, \quad M_x = -D_{12}w_{yy} = \mu_{12}M_y.$$

V případě zatížení pouhými momenty  $M_y$ , tj. při  $M_x = 0$ , vznikne podle 1. řádku (16) nenulová křivost  $w_{xx} = -D_{12}w_{yy} / D_{11} = -\mu_{21}w_{yy}$  a pro vznik téže  $w_{yy}$  stačí menší moment

$$M_y = -D_{22}(1 - \mu_{12}\mu_{21}) w_{yy}.$$

Lze tedy pro tvarově ortotropní desky zavést tuto definici součinitelů příčné kontrakce: Součinitel  $\mu_{21}$  je číselně roven momentu  $M_y$ , kterým je třeba zatížit strany  $y = \text{konstanta}$  prvku, zatíženého momentem  $M_x = 1$  na stranách  $x = \text{konstanta}$ , aby se prvek ohnul do válcové plochy  $w(x)$ . Součinitel  $\mu_{12}$  je pak obdobně hodnota  $M_x$  na stranách  $x = \text{konstanta}$  prvku, zatíženého momentem  $M_y = 1$  na stranách  $y = \text{konstanta}$  a ohnutého do válcové plochy  $w(y)$ . Snadno lze ověřit, že tato definice je u fyzikálně ortotropních desek rovnocenná původní definici (8) a u izotropních desek vede na známé  $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$ . Současně je při této definici patrné, že má-li konstrukce povahu silného roštu se slabou deskou, je prakticky  $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$  a jsou přípustné vzorce odst.6.221.

Maxwell-Bettiho věta u tvarově ortotropních desek:

Zatížíme-li prvek desky jen momenty  $M_x = 1$ , vzniknou křivosti

$$(67) \quad \begin{aligned} w_{xx} &= -1 / D_{11}(1 - \mu_{12}\mu_{21}), \\ w_{yy} &= + \mu_{12} / D_{11}(1 - \mu_{12}\mu_{21}). \end{aligned}$$

Zatížíme-li jen momenty  $M_y = 1$  budou křivosti

$$(68) \quad \begin{aligned} w_{yy} &= -1 / D_{22}(1 - \mu_{12}\mu_{21}), \\ w_{xx} &= + \mu_{21} / D_{22}(1 - \mu_{12}\mu_{21}). \end{aligned}$$

Při malých průhybech jsou poloměry křivosti  $R_x = 1 / w_{xx}$ ,  $R_y = 1 / w_{yy}$ . Vztahujeme-li momenty na jednotku šířky, tj. uvažujeme-li o prvku se stranami  $b_x = b_y = 1$ , pak jsou úhly vzájemného natočení původně rovnoběžných svislých stěn prvku

$$\alpha = b_x / R_x = w_{xx}, \quad \beta = b_y / R_y = w_{yy}.$$

Maxwell-Bettiho věta  $\alpha = \beta$  vede na rovnost (67) = (68), tj.

$$(69) \quad \frac{\mu_{12}}{D_{11}} = \frac{\mu_{21}}{D_{22}}$$

kteřá je identická s rovností (18) u fyzikálně ortotropních desek. Tam byla ovšem důsledkem obecně platné symetrie fyzikálních konstant (8), která plyne přímo z požadavku, aby potencionální energie vnitřních sil tělesa byla homogenní kvadratickou funkcí složek napětí nebo složek deformace.

Také u tvarově ortotropních desek nutno tedy dbát, aby byla splněna relace (69). Zjistíme-li nějakou technickou úvahou nebo experimentálně, např. součinitel  $\mu_{21}$  pro stav na obr.7a, je tím již určen i druhý součinitel ( pro stav na obr.7c):

$$(70) \quad \mu_{12} = \frac{D_{11}}{D_{22}} \mu_{21}.$$

Splnění této relace nevede u technických materiálů chovající se jako fyzikálně ortotropní (překližky, sklolamináty apod.) na velké hodnoty  $\mu$ . Např. pro určitý druh lisovaných překližek je

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} = \frac{305}{46,7}; \quad \mu_{21} = 0,02; \mu_{12} = 0,13;$$

nebo u jedné křížem lepené překližky se zjistilo

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} = \frac{120}{60}; \quad \mu_{21} = 0,0355; \mu_{12} = 0,071.$$

U tvarově ortotropních desek se v praxi může vyskytnout velký poměr  $D_{11} / D_{22}$ , řádově 10 až 20. Zpravidla se však zjistí, že je při tom součinitel  $\mu_{21}$  velmi malý, takže  $\mu_{12}$  nepřesáhne 0,50 až 1,00. Vzhledem k definici  $\mu_{12}, \mu_{21}$  pomocí ohybových momentů (obr.7) nejsou teoreticky na závadu hodnoty větší než 0,50 nebo i větší než 1,00. Nejde vlastně o žádné fyzikální součinitele kontrakce, které by byly limitovány objemovými změnami látky. V reálných případech při správné úvaze o příčných momentech se však takové hodnoty málokdy vyskytnou.

Protože zjištění skutečného součinitele  $\mu_{12}$  nebo  $\mu_{21}$  může být samo o sobě dost složitým problémem, používají se v praxi pro tzv. nediagonální tuhostní člen  $D_{12}$  jednoduché přibližné vzorce, které neobsahují tyto součinitele, ale jen součinitel  $\mu$  isotropního materiálu, z něhož je deska zhotovena, tedy např.  $\mu = 0,15$  pro beton nebo 0,30 pro ocel. U žebrovaných a komůrkových desek lze užít zjednodušeného vzorce (28) :

$$(71) \quad D_{12} = \mu \sqrt{D_{11} D_{22}},$$

nebo obdobného vzorce (27), který však dává kladné  $D_{12}$  jen pro  $\gamma + \mu > 1$ , což např. limituje jeho použití u betonu na případy  $0,85 < \gamma < 1$ , které jsou ale právě dosti časté.

Podobně se místo (56) použije zjednodušený vzorec (23) :

$$(72) \quad D_{33} = \frac{1-\mu}{2} \sqrt{D_{11} D_{22}}$$

a do vzorců (53) až (55) se dosazuje zvětšený modul pružnosti (41), což představuje u betonu zvětšení o 2,25% a u oceli o 9%, tedy celkem malé.

Pro využití tisků  $M_{xy}$  platí závěry z předešlého odstavce 6.221.

Poznámka k střednicové rovině desky :

Jak je patrné z předchozích obrázků, leží obecně těžiště řezů  $x = \text{konstanta}$  v jiné vzdálenosti  $e_x$  od horních vláken desky než těžiště řezů  $y = \text{konstanta}$  ( $e_y$ ). Vzniká tedy otázka, kde je střednicová rovina desky. Tato otázka zmizí, uvažíme-li, že počítáme s dvojrozměrným deskovým kontinuem, v němž  $e_x, e_y$  patří vlastně do „fyzikálních“ vlastností. Závažnější je chyba, která vzniká u desek se značně rozdílným žebrováním zanedbáním vlastní rovinné tuhosti  $D_0 = \frac{Et}{(1-\mu^2)}$  horní desky, resp. plochu tloušťky  $t$ . Pro tyto případy se osvědčil Gienckeho vzorec pro smíšenou tuhost (20)

$$(73) \quad D_3 = C + \mu e_x e_y D_0 + (e_x + e_y)^2 \frac{1+\mu}{4} D_0,$$

vycházející z celkové torzní tuhosti desky

$$(74) \quad C = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + (GJ_k)_x + (GJ_k)_y.$$

Odtud lze určit konstantu ortotropie (26); viz [ 1 ], str. 38

### 6.2.3 Posouvající síly a reakce

Posouvající síly plynou z podmínek momentové rovnováhy prvku desky kolem osy  $y$  a  $x$  (obr. 2) :

$$(75) \quad T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$

$$(76) \quad T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Po dosazení (16), (58), (59) :

$$(77) \quad T_x = - \left[ (D_{11} w_{xx} + D_{12} w_{yy})_x + (D_{33y} \cdot 2w_{yx})_y \right] = -D_{11} w_{xxx} - (D_{12} + 2D_{33y}) w_{xyy},$$

$$(78) \quad T_y = - \left[ (D_{21} w_{xx} + D_{22} w_{yy})_y + (D_{33x} \cdot 2w_{xy})_x \right] = -D_{22} w_{yyy} - (D_{21} + 2D_{33x}) w_{xxy}.$$

Porovnáme-li to se 4. a 5. řádkem matice (16) u fyzikálně ortotropních desek, vidíme, že místo smíšené tuhosti  $D_3$  podle (20) je nyní ve 4. řádku člen

$$(79) \quad D_{3x} = D_{12} + 2D_{33y}$$

a v 5. řádku člen

$$(80) \quad D_{3y} = D_{12} + 2D_{33x}.$$

V základní deskové rovnici (25), která je podmínkou svislé rovnováhy prvku desky

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0$$

a zároveň Eulerovou diferenciální rovnicí variační deskové úlohy, vznikne aplikací (79) a (80) místo  $2D_3$  výraz  $(D_{3x} + D_{3y})$ , takže pro zjištění výpočtové hodnoty  $D_3$  platí relace

$$(81) \quad D_3 = \frac{1}{2} (D_{3x} + D_{3y}).$$

Přibližně (viz 63a) je  $D_{33x} = \frac{1}{4} (GJ_k)_x$ ,  $D_{33y} = \frac{1}{4} (GJ_k)_y$ .

Programy pro fyzikálně ortotropní desky počítají ovšem  $T_x$  a  $T_y$  podle matice (16). Hodnoty, platné pro tvarově ortotropní desku, lze z nich zjistit jen dosti složitým přepočtem. Máme-li již zjištěny kroutící momenty  $M_{yx}$  a  $M_{xy}$ , možno tento výpočet kontrolovat přímo podle (75) a (76). V obou případech se derivace nahrazují diferencemi hodnot v přilehlých uzlech dělení dané desky na konečné prvky, takže k úplné shodě nemůže dojít.

Ve většině rozsahu půdorysu u běžných desek převládají první členy (75), (76) nad druhými a mimoto není rozdíl (79), (80) oproti (20) příliš velký, takže je možno hodnot  $T_x$ ,  $T_y$  použít k orientačnímu dimenzování na smyk.

Reakce desky se počítají podle (29) nebo (30) také u tvarově ortotropních desek.

### 6.3 Desky s vlivem příčného smyku.

Jde o obdobu krátkých nebo vysokých apod. nosníků, u nichž nelze zanedbat vliv posouvajících sil  $T$  na deformaci, protože je řádově stejný jako vliv momentů  $M$ . To ovlivňuje tvar ohybové čáry  $w(x)$  a tím i hodnoty všech staticky neurčitých veličin, např. podporových momentů, které jsou směrodatné pro dimenzování.

Současné programy, jsou sestaveny pro fyzikálně ortotropní desky podle odst.5.2 s maticí fyzikálních konstant (33) a možností rozšíření na plnou matici typu (5,5) při obecné anizotropii. Proto je nutné tvarově ortotropní desku nejprve převést na fyzikálně ortotropní, tj. stanovit konstanty  $D_{ik}$  v matici (33). Pro konstanty  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  platí pokyny z odst.6.22. Zbývá tedy určit konstanty  $D_{44}$  a  $D_{55}$  ve vztazích

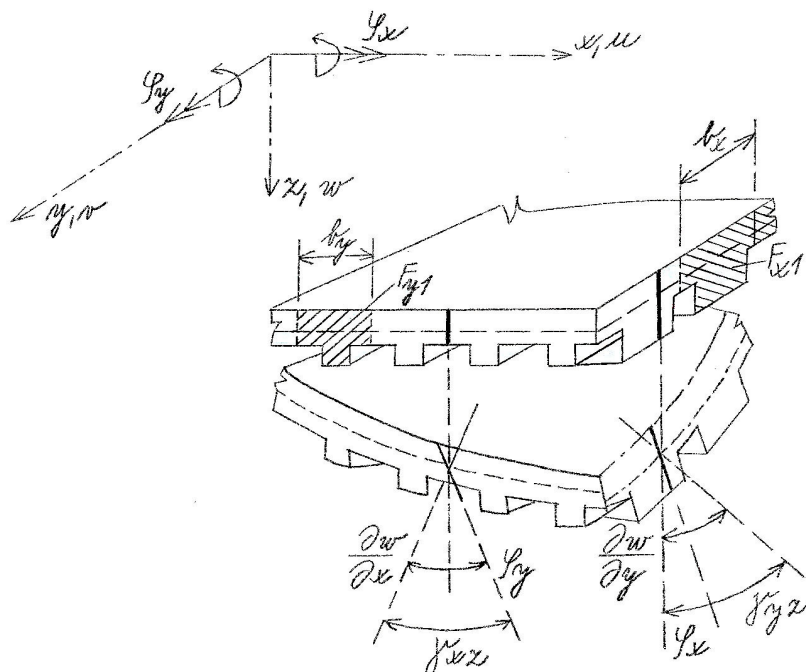
$$(82) \quad T_x = D_{44} \gamma_{xz}, T_y = D_{55} \gamma_{yz}$$

mezi posouvajícími silami a příčnými smykovými složkami deformace  $\gamma$  tj. změnami pravých úhlů mezi hmotnou normálou střednicové roviny desky po jejím přechodu do ohybové plochy  $w(x,y)$ , viz. obr.8. Tyto deformace (32) jsou nulové, jen když  $w_x = -\varphi_y$ ,  $w_y = \varphi_x$  (viz znaménková dohoda obr. 1 a 8), tj. když platí Kirchhofova hypotéza (4).

Nejjednodušší vzorce dostaneme, předpokládáme-li, že příčné smykové napětí  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  je rovnoměrně rozloženo po průřezové ploše  $F_x$ ,  $F_y$  řezů šířky  $b = 1$  rovinami  $x = \text{konstanta}$  a  $y = \text{konstanta}$ . Pro žebrovanou desku na obr. 8 je

$$(83) \quad F_x = \frac{F_{x1}}{b_x}, F_y = \frac{F_{y1}}{b_y}.$$





Obr. 8

V tom případě je  $T_x = \tau_{xz} F_x$ ,  $T_y = \tau_{yz} F_y$ , a při modulu pružnosti ve smyku  $G$ , stejném v obou směrech, je

$$(84) \quad D_{44} = GF_x, \quad D_{55} = GF_y$$

Jestliže v některém nebo obou směrech nejsou žádná žebra a tloušťka desky je  $h$ , pak je v tom směru

$$(85) \quad F_x = h, \quad F_y = h, \quad \text{takže při řešení isotropní tlusté desky je}$$

$$(86) \quad D_{44} = D_{55} = Gh.$$

Tyto vzorce stačí pro odhad velikosti smykového napětí a smykové výztuže v betonu.

Pro podrobnější analýzu je třeba vycházet ze skutečného průběhu smykového napětí  $\tau_{xz}(z)$ ,  $\tau_{yz}(z)$  v intervalu  $-h_1 \leq z \leq h_2$ , je-li  $h_1 + h_2 = h$  tloušťka desky a  $h_1, h_2$  vzdálenosti krajních vláken od těžiště průřezu. U tvarově ortotropních desek lze vycházet ze známého vzorce Grashof – Žuravského (s deskovými indexy)

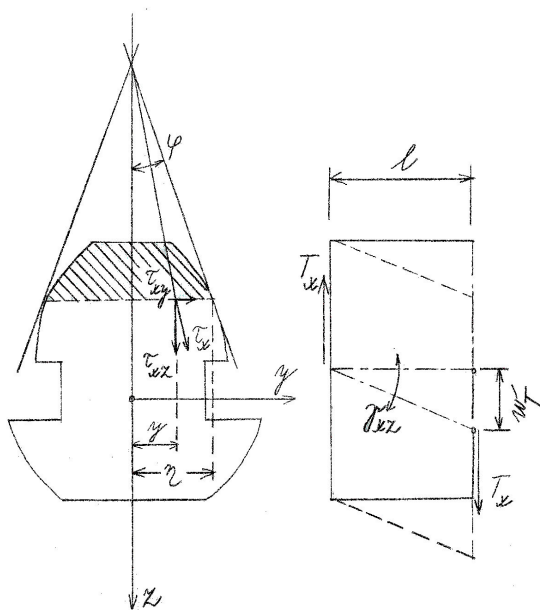
$$(87) \quad \tau_{xz}(z) = \frac{T_x}{J_x} \frac{S(z)}{2\eta(z)}$$

a obdobně pro  $\tau_{yz}$  kde  $2\eta(z)$  je šířka průřezu v místě daném souřadnicí  $z$  a  $S(z)$  je statický moment části průřezu nad touto šířkou k vodorovné těžištní ose (obr.9). Tento vzorec vede u obdélníkového průřezu šířky  $\eta = 1$  na průběh  $\tau_{xz}(z)$  podle paraboly 2.stupně s maximem  $\frac{3}{2} \frac{T}{h}$  v těžišti.

Týž průběh dostaneme u izotropních desek v Kirchhoffské teorii (4) z přesných Cauchyho rovnic rovnováhy, takže se lze domnívat, že aplikace (87) u tvarově ortotropních desek bude dosti výstižná.

Nerovnoměrně rozdělené smykové napětí  $\tau_{xz}(z)$ ,  $\tau_{yz}(z)$  způsobí smykové deformace  $\gamma_{xz}(z)$ ,  $\gamma_{yz}(z)$ , nerovnoměrně rozdělené po tloušťce desky.

Pokud zavedeme předpoklad tuhé normály (obr.8), je důsledkem konstantní  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  tedy i  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , takže jsou oprávněny vzorce (83)-(86). Vycházíme-li z přesnějšího průběhu (87) a chceme dodržet postup MKP, musíme zjistit vztah mezi  $T_x$ ,  $T_y$  a hodnotami  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ , které jsou na  $\underline{z}$  nezávislé a reprezentují úhlové změny ve smyslu ekvivalence potenciální energie vnitřních sil. Pro tvarově ortotropní desky vyjdeme opět z prutové úvahy: V prvku prutu délky  $l$ , v němž působí konstantní síla  $T_x$  se nahromadí potenciální energie:



Obr. 9

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_{F_x} \int (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dF_x$$

Dosadíme-li sem podle Grashofovy hypotézy  $\tau_{xz}$  (87) a

$$\tau_{xy}(y,z) = \tau_{xz}(z) \frac{y \operatorname{tg} \varphi(z)}{\eta(z)}$$

a podle Hookeova zákona  $\frac{\gamma_{xz} \tau_{xz}}{G}, \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

$$\text{vyjde } \pi_i = \frac{IT_x^2}{2GJ_x^2} \int_{F_x} \int \frac{S^2(z)}{4\eta^2(z)} \left( 1 + \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi(z)}{\eta^2(z)} \right) dF_x.$$

Zavedme obvyklý tvar výrazu pro energii s opravným součinitelem  $\beta$ , vyjadřujícím proměnnost  $\tau$  po průřezu

$$(88) \quad \pi_i = \frac{1}{2} 1 \frac{T_x^2}{GF_x} \beta,$$

$$(89) \quad \beta = \frac{F_x}{4J_x^2} \int_{F_x} \int \frac{S^2(z)}{\eta^2(z)} \left( 1 + \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi(z)}{\eta^2(z)} \right) dy dz.$$

Napišme energii (88) ve tvaru polovičního součinu síly  $T_x$  a dráhy  $w_T$  (obr.9) :

$$\pi_i = \frac{1}{2} T_x w_T,$$

$$w_T = \frac{\beta T_x}{GF_x} l = \gamma_{xz} l.$$

Pak je patrné, že konstantní úhlová změna, energeticky ekvivalentní proměnným  $\gamma_{xz}(z)$  je tedy

$$\gamma_{xz} = \beta \frac{T_x}{GF_x}$$

$$T_x = \frac{1}{\beta} GF_x \gamma_{xz}.$$

Místo vzorců (84), platných pro konstantní  $\tau_{xz}$  po celém průřezu, lze tedy počítat s těmito členy matice fyzikálních konstant :

$$(90) \quad D_{44} = \frac{1}{\beta_x} GF_x, D_{55} = \frac{1}{\beta_y} GF_y,$$

kde indexy při  $\beta$  upozorňují, že  $\beta$  může být různé pro řezy  $x = \text{konstanta}$  a  $y = \text{konstanta}$ .

## 6.4 Komůrkové průřezy

### 6.4.1 Tlustostěnné komůrkové průřezy – vylehčené desky.

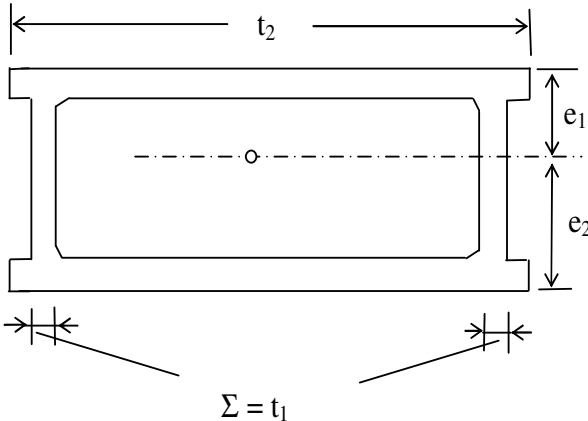
Deska vylehčená dutinami v jednom směru průběžně probíhajícími (označme je  $x$ ) může být počítána jako tvarově ortotropní deska s příčnou kontrakcí a platí pro ni vzorce odst. 6.22. Předpokladem je, že stěny komůrkových průřezů jsou dosti silné. Jejich tloušťka  $t_i$  (může být i proměnná) by měla řádově splňovat nerovnost

$$(91) \quad t_i > \frac{h}{10},$$

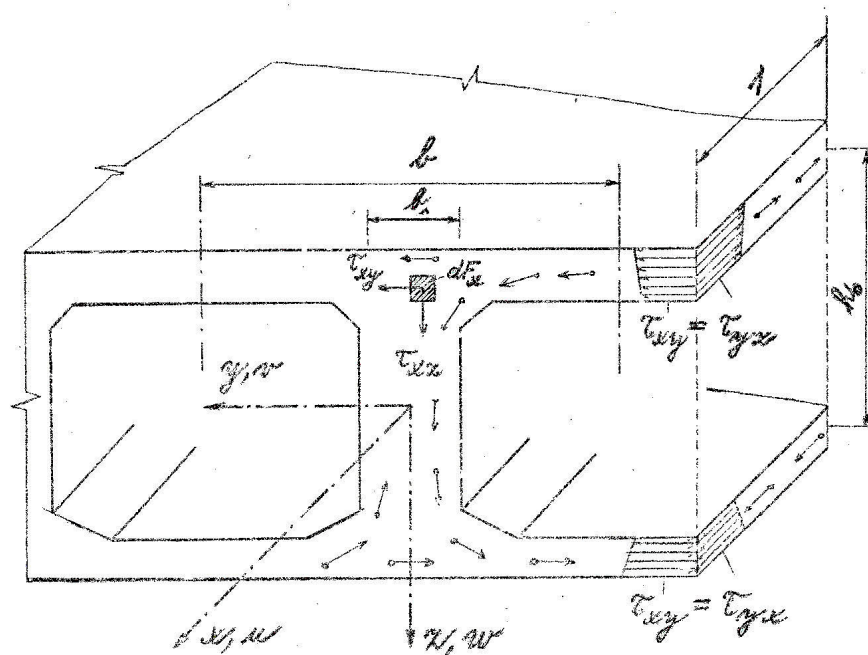
je-li  $h$  celková tloušťka desky. Jsou-li svislé stěny dostatečně tlusté (poměr  $b_s / b > 1/10$ ), lze zanedbat vliv posouvajících sil na deformaci desky a použít těchto vzorců z odst.6.22 k výpočtu matice fyzikálních konstant (obr.10) :

$$(92) \quad D_{11} = \frac{EJ_{xb}}{b(1-\mu^2)}, \quad D_{22} = \frac{EJ_y}{1-\mu^2}$$

$$D_{12} = \mu\sqrt{D_{11}D_{22}}, \quad D_{33} = \frac{1-\mu}{2}\sqrt{D_{11}D_{22}}.$$

Průřez :	$\beta$
Obdélník (deska bez žeber)	6/5
Plný kruh a přibližně i pro plný $n$ – úhelník ( $n \geq 6$ )	32/27 (TP 3) 10/ 9 (ROARK)
Kružnice – tenkostěnné kruhové prstence a přibližně $n$ – úhelníky ( $n \geq 6$ )	2
Ocelové I č.8 až 45	2,8 až 2,1
Betonové profily typu I, □ T apod. s plochou $F$ a plochou stojin $F_s$ , přibližně	$F/F_s$
<p>Průřezy I, □ apod. při součtu tloušťek svislých stěn <math>t_1</math> a poloměru setrvačnosti k neutrální ose <math>r</math> :</p> 	$1 + k \left( \frac{t_2}{t_1} - 1 \right) \frac{4er_2^2}{10r^2}$ $k = \frac{3(e_2^2 - e_1^2)e_1}{2e_2^3}$

Hodnota  $J_y$  se spočítá pro řez  $y$  = konstanta jednotkové šířky, vedený nejslabší částí vodorovných stěn truhlíků.



Obr. 10

Hodnoty  $J_{xb}$  se počítají pro 1 průřez, v němž šířka přírub  $b$  je vždy vzdálenost mezi svislými osami komůrek. Při nesteranných komůrkách vzniknou i nesymetrické 1 průřezy.  $J_{xb}$  se ale vždy vztahuje k vodorovné těžištní ose  $y$ . Pokud jde o různost výšky těžišť řezů  $x = \text{konstanta}$  a  $y = \text{konstanta}$ , viz pozn. na konci odst. 6.22, není podstatná. K výpočtu torzního členu  $D_{33}$  lze použít též vzorce (63) :

$$D_{33} = \frac{1}{8} \left[ (GJ_k)_x + (GJ_k)_y \right],$$

Uvážíme-li připomínky, uvedené v odst. 6.22 za tímto vzorcem. V podstatě jde o to, že rozdíly mezi hodnotami  $J_{kx}$ ,  $J_{ky}$ , plynoucími ze Saint Venantovské torze prutů a hodnotami  $J_{kx}$ ,  $J_{ky}$ , které přísluší skutečným smykovým tokům podle (58), (59), jsou u komůrkových průřezů ještě výraznější než u desek s otevřenými žebry (obr.6b). Na obr.10 jsou šipkami s kroužky znázorněny smykové toky, jak přibližně vzniknou vlivem nutnosti dodržet vzájemnost  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . V uzavřených komůrkách s dosti silnými svislými stěnami se může vyvinout cirkulace smyku a příslušný  $J_{kx}$  z prutového výpočtu bude vcelku výstižný. V horní a dolní části průřezu  $y = \text{konstanta}$  bude však oběh analogický k obr.6b, silně potlačen a zhruba zde bude kroučící moment dán dvojicí vodorovných sil  $V_x$  na rameně  $h_0$ . Dále záleží na tom, má-li deska příčná diafragmata a v jaké vzdálenosti, protože se v jejich okolí opět mění smykový tok. Jsou-li dosti hustě rozmístěna, vzniknou vlastně v řezech  $y = \text{konstanta}$  opět komůrkové průřezy a jejich  $J_{ky}$ , vztážený na jednotku šířky, bude pro výpočet směrodatný.

### 6.4.2 Tenkostěnné komůrkové průřezy

Přibližně je lze počítat jako desky s vlivem příčného smyku, při čemž použijeme těchto vstupních údajů, vyplývajících srovnáním s upravenými vzorci V.Křístka :

$$(93) \quad D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{J_{xa}}{a}, \quad D_{12} = \mu D_{11}, \quad D_{33} = \frac{1-\mu}{2} D_{11},$$

kde  $J_{xa}$  je moment setrvačnosti I průřezu o šířce  $a$  (obr.11) mezi osami komůrek. Může být ovšem po prvcích proměnný, tj. komůrky nestejně. Tuhost  $D_{22}$  není tím příliš nadhodnocena, protože vliv stojiny na  $J_{xa}$  je malý. Podobně je  $D_{33}$  dosti výstižné zvláště při vnitřních komůrkách, protože smykový tok proniká jen málo do vnitřních tenkých stojin. Přibližně stačí počítat

s orientační hodnotou  $\frac{J_{xa}}{a} = \frac{1}{2} t h^2$ , kde  $t$  je tloušťka vodorovných desek a  $h$  jejich osová

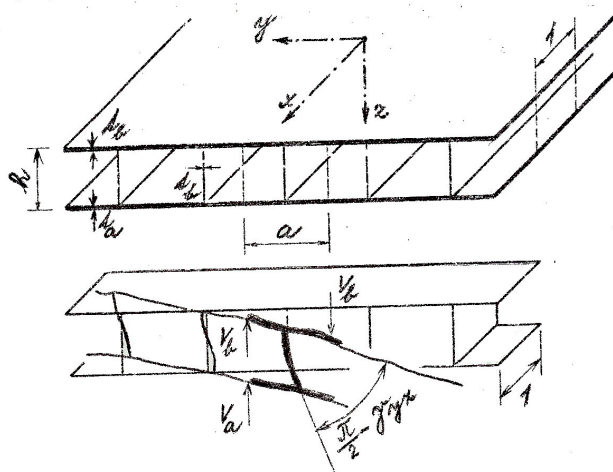
vzdálenost. Při nestejných tloušťkách lze tuto orientační hodnotu zjistit podle dalšího vzorce (96).

Smykovou tuhost  $D_{55}$  v příčném směru  $y$  (viz 5.řádek matice (33)) lze zjistit porovnáním vztahu  $T_y = D_{55} \gamma_{yz}$  se vztahem, platícím mezi příčnou silou

$$T_y = V_a + V_b$$

na silně vytaženém rámovém útvaru I jednotlivé šířky a jeho celkovým zkosením  $\gamma_{yz} = \gamma_1 + \gamma_2$ ,

kde  $\gamma_1$   $\gamma_2$  jsou prutové výchylky přírub a stojin. Při rozměrech podle obr.11 vyjde



Obr. 11

$$(94) \quad V_b = \alpha V_a, \quad \alpha = \frac{\frac{h}{t_h^3} + \frac{a}{6t_a^3}}{\frac{h}{t_h^3} + \frac{a}{6t_b^3}},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2aT_y}{E(1+\alpha)} \left[ \frac{a}{t_a^3} + \frac{h}{t_h^3} (2-\alpha) \right].$$

Je tedy :

$$(95) \quad D_{55} = \frac{E(1+\alpha)}{2a \left[ \frac{a}{t_a^3} + \frac{h}{t_h^3} (2-\alpha) \right]}, [\text{Nm}^{-1}].$$

Smykový modul  $G_{23}$  (odst.5) jsme k této úvaze nepotřebovali, ale mohli bychom jej pro náhradní fyzikální deskové kontinuum zjistit např. za předpokladu (34) ze vztahu  $G_{23} = D_{55} / h$ , aniž zavádíme představu sendvičové desky s měkkým jádrem.

V místě příčných ztužidel a tuhost  $D_{55}$  podstatně zvětšuje. Jsou-li velmi tuhá a zajišťují nedeformovatelnost průmětu průřezu do svislé roviny, pak u prvků v jejich okolí lze  $\gamma_{yz}$  zanedbat (viz postup u  $D_{44}$ ). Tak by tomu mělo být u účelně navržených diafragmat a jejich stěnová tuhost je oproti dříve uvedené vsutku řádově větší. V MKP můžeme proměnu  $D_{55}$  po prvcích snadno respektovat. U hustě rozmístěných diafragmat, případně-li na každý konečný pruh jedno diafragma, lze počítat s průměrnou hodnotou  $D_{55}$ , ale účinek smyku  $\gamma_{yz}$  pak bude malý, jinak by tato diafragma neplnila jeden ze svých účelů.

Pokud jde o tuhost  $D_{44}$  (4.řádek matice (33)), je řádově větší než  $D_{55}$  podle (95) a smykové změny  $\gamma_{xz}$  lze zanedbat. Ve vstupech to lze vyjádřit hodnotou

$$D_{55} = 10^{-\alpha} D_{44}, \alpha = 2 \text{ nebo } 3.$$

Bylo by též možné upravit program pro desky s jednosměrným vlivem smyku, který anuluje předem  $\gamma_{xz}$ .

Zpracování vytištěných vnitřních sil :

$M_x [\text{N}]...$  na jeden  $l$  průřez podle obr.11  
případně  $M = a M_x$ ,  
napětí  $\sigma_x = M_z / J$ ,  
extrémy  $\sigma_x = \pm M / W$ .

$T_x [\text{Nm}^{-1}]...$  obdobně na jeden  $l$  průřez bude  $T = a T_x$ , napětí  $\tau_{xz}$  podle (87),  
přibližně u velmi tenkých stěn  $\tau_{xz} = T / h t_h$  jen ve stojině.

$M_y [\text{N}]...$  V horní a dolní desce vyniknou v příčném směru  $y$  normální síly  
 $N_y = \pm M_y / h$  a napětí  $\sigma_{yb} = -M_y / h t_b$ ,  $\sigma_{ya} = M_y / h t_a$ .

$T_y [\text{Nm}^{-1}] \dots$ 

V horní a dolní desce vzniknou příčné posouvající síly  $V_b$  a  $V_a$  podle (94), tj.  $V_a = T_y / (1 + \alpha)$ ,  $V_b = \alpha V_a$ , při stejných tloušťkách desek

$$V_a = V_b = \frac{1}{2} T_y.$$

Příčné smykové napětí přibližně :

$$\tau_{yzb} = V_b / t_b, \tau_{yza} = V_a / t_a.$$

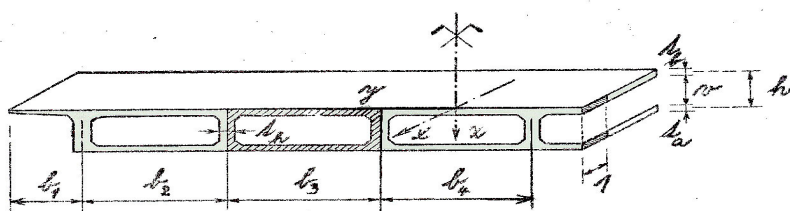
 $M_{xy} [\text{N}] \dots$ 

V horní i dolní desce vzniknou vodorovné smykové síly  $T_{xy} = \pm M_{xy} / h$  a napětí  $\tau_{xyb} = T_{xy} / t_b$ ,  $\tau_{xya} = T_{xy} / t_a$ .

Z toho se vypočte u kovových desek hlavní napětí pro posouzení bezpečnosti. U železobetonových konstrukcí (tenkostěnných) obdobně s tím, že tahy převezme měkká nebo předpínací výztuž a vliv  $M_{xy}$  se projeví v dimenzovacích momentech, tj. záměnou  $M_x$ ,  $M_y$  za  $M_{x\text{dim}}$ ,  $M_{y\text{dim}}$ .

### 6.4.3 Srovnávací příklad

Pro porovnání vstupních hodnot  $D_{ik}$  uveďme příklad komůrkového průřezu mostní desky nadjezdu C 201 ve Vsetíně, montované lamelové konstrukce.



Obr. 12

Při dělení na konečné prvky bylo použito dělení koincidující s půdorysem komůrek, takže tuhosti prvků se děrovaly podle tuhosti jednotlivých komůrek. Schematicky je příčný řez znázorněn na obr.11, vzhledem k proměnnosti tloušťky stěn byl poněkud složitější. Výpočet podle odst.6.4.1 – tlustostěnné konstrukce – (92) : Momenty setrvačnosti jednotlivých komůrek  $J_{xb}$  byly zjištěny na stolním počítači HEWLET-PACKARD programem pro geometrické charakteristiky rovinných útvarů. Momenty  $J_y$  lze snadno počítat podle vzorce

$$(96) \quad J_y = \frac{t_a t_b}{t_a + t_b} h^2 + \frac{1}{12} (t_a^3 + t_b^3), \text{ kde } h = v + \frac{1}{2} t_a + \frac{1}{2} t_b \text{ je osová vzdálenost vodorovných stěn.}$$

Svislé stěny průřezu mají jednotnou tloušťku 30 cm a jejich osová vzdálenost je 300 cm. Dále uveďme hrubé rozměry pro truhlík  $b_3$  v [cm] :  $t_b = 18$ ,  $v = 96$ ,  $t_a = 14$ ,  $h = 112$   
a totéž pro truhlík  $b_4$  :  $t_b = 19,5$ ,  $v = 101,5$ ,  $t_a = 14$ ,  $h = 118$

Fyzikální konstanty  $E = 385000 \text{ daN/cm}^2$  ( $\text{kp/cm}^2$ ),  $\mu = 0,15$



Matice tuhosti pro truhlík  $b_4$  (horní čísla podle (92) – tlustostěnné, dolní čísla podle (93) – tenkostěnné se zanedbáním svislé stěny) :

$\underline{D} =$	509 809	70 316	0	.10kNm (Mpm)
	448 000	67 100	0	
	70 316	431 038	0	
	67 100	448 000	0	
			199 228	
	0	0	224 000	

Pro truhlík  $b_3$  :

$\underline{D} =$	475 046	64 720	0
	389 000	58 300	0
	64 720	391 887	0
	58 300	389 000	0
			183 374
	0	0	194 500

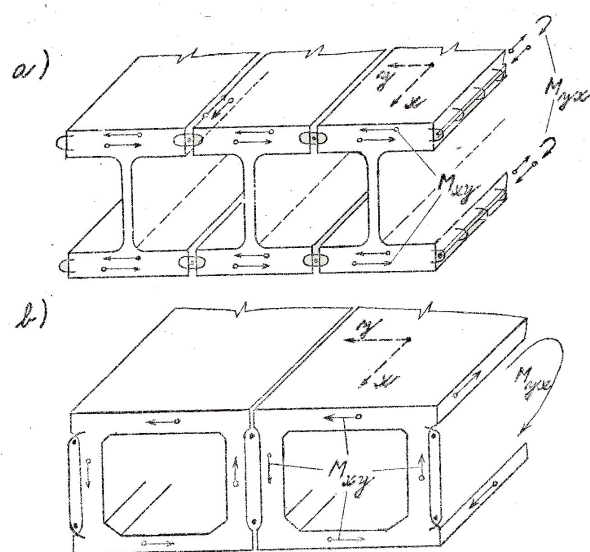
Zmenšení ohybové tuhosti  $D_{11}$  zanedbání svislé stěny je zřejmé; tuhosti  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  vyjdou z tenkostěnné teorie poněkud větší. Rozdíly v momentech ( násobky typu  $D_{11}w_{xx}$  apod. ) budou menší, protože při větší  $D_{11}$  vyjde menší průhyb  $w$  i derivace  $w_{xx}$ . Jak známo, nezávisí u isotropních desek momenty na  $D$  vůbec, pokud jde jen o silové zatížení. Tato nezávislost má u ortotropních desek jiný charakter : momenty nezávisí na absolutních hodnotách  $D_{ik}$ , ale na jejich poměrech. Nejcharakterističtější poměr pro tuto závislost je poměr

$$\chi = 2D_{33} / \sqrt{D_{11}D_{22}},$$

viz (26). Příklady vlivu  $\chi$  na momenty viz [ 1 ], str. 48 ad., tab. 2 a grafy na obr. 13, str. 52.

## 6.5 Žaluziové desky.

Jde o kolmé nebo šikmé desky skládané z prefabrikátů, při čemž se v příčném směru nepředpokládá žádné spolehlivé monolitické spojení ( např. příčným předpětím, pak by se počítaly jako monolitické podle předešlých odst.).



Obr. 13

Podélné spáry přenášejí jen posouvající síly  $T_y$  a žádné ohybové momenty  $M_y$ .

Žaluziových desek je mnoho typů. Z hlediska vstupních údajů  $D_{ik}$  leží všechny mezi dvěma limitními případy (obr.12) :

a) Vzniklé komůrkové průřezy mají tak slabé svislé stěny, že do nich nepřechází prakticky žádný smykový tok, takže krouticí moment  $M_{xy}$  přenáší jen smyk v horní a dolní stěně. Pak platí prakticky rovnost  $M_{xy} = M_{yx}$  a  $J_{kx} \approx J_{ky} \approx J_k$ , takže podle vzorce (63) je torzní tuhost

$$(97) \quad D_{33} = \frac{1}{4} \frac{GJ_{kb}}{b}, \quad [\text{Nm}]$$

počítáme-li  $J_{kb} [\text{m}^4]$  pro jeden prefabrikát šířky  $b [\text{m}]$ .

Pro ostatní tuhosti platí vzorce (92) jako u komůrkových průřezů.

b) Průřezy mají velmi silné svislé stěny, takže vznikne souvislá cirkulace smykového toku v řezech  $x = \text{konstanta}$ , což vzhledem k větě o vzájemnosti  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ovlivní i smykový tok v řezech  $y = \text{konstanta}$ . Pak platí vzorec (63) s poměrnými torzními tuhostmi  $J_{kx}, J_{ky} [\text{m}^3]$ , při stálém smykovém modulu  $G$  :

$$D_{33} = \frac{1}{8} G (J_{kx} + J_{ky})$$

c) Zvláštní případ nastane, když podélné spáry nemohou přenášet žádný krouticí moment. Pak je

$$J_{ky} = 0, \quad D_{33} = \frac{1}{8} G J_{kx}.$$

Pro vyhodnocení tisků  $M_{xy}$  obecně platí vzorec (62).

Jestliže u desek typu na obr.12a jsou stojiny tak štíhlé, že vzniká příčné zkosení, zjistí se příslušná tuhost  $D_{55}$  podle odst.63, vzorec (95) odst. 6.42.

## 6.6 Jiné typy desek.

Železobetonové desky s různou výztuží  $F_{ax}$ ,  $F_{ay}$  ve směru  $x$  a  $y$  se chovají v prvním stadiu před vznikem trhlinek v tažené části betonu prakticky jako izotropní. Ve druhém stadiu se zjistí momenty setrvačnosti  $J_x$ ,  $J_y$  nehomogenních průřezů jednotkové šířky složených z oceli a tláčeného betonu. Poměr  $J_x/J_y$  vyjde přibližně roven poměru  $F_{ax}/F_{ay}$  s odchylkou několika procent. Protože oblast tláčeného betonu, kde ještě dochází k příčné kontrakci (resp. dilataci) je malá, je efektivní hodnota  $\mu$  menší než 0,15. Byla naměřena až 0,02. Tuhosti se počítají z dřívějších vzorců

$$(98) \quad D_{11} = E'J_x, \quad D_{22} = E'J_y, \quad D_{12} = \mu\sqrt{D_{11}D_{22}}, \quad D_{33} = \frac{1-\mu}{2}\sqrt{D_{11}D_{22}},$$

$$(99) \quad D_{44} = D_{55} = \frac{1}{\beta} Gh, \quad \beta \approx 1, \quad E' = \frac{E}{1-\mu^2}.$$

S vlivem smyku se počítá jen u desek, jichž tloušťka  $h > L/5$ , viz odst. 5.2 a 6.3; prakticky závažné odchylky vznikají až při  $h > L/3$ .

Vlnovky se počítají podle (98), při čemž se bere při sinusovém zvlnění průřezů  $x$  = konstanta :

$$(100) \quad J_x = \frac{1}{2} h H^2 \left( 1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 H^2 / 4 l^2} \right),$$

$$J_y = \frac{1}{s} \frac{h^3}{12},$$

kde je tvar vln  $z = H \sin \pi x / l$ , tloušťka vlnovky  $h$ , amplituda vln  $H$ ,  $l$  délka třetiny jedné půlvlny. Lze použít přibližně i při nesinusovém tvaru vln. Vlnovky dvojnásobné (systém BEHLEN, PUMS apod.) vyžadují zvláštní výpočet  $J_x$ . U supertenkostěnných vlnovek lze  $J_x$  počítat na křivce  $z = f(x)$  a násobit tloušťkou  $h$ . Poměr  $J_y/J_x$  je u nich blízký nule.

Příhradové desky jsou prutové soustavy, užívané k zastřešení velkých půdorysů (stadiony apod.). Pro předběžný výpočet lze považovat za ortotropní desky, při čemž momenty setrvačnosti  $J_x, J_y$  plynou z průřezových ploch  $F_{ax}, F_{ay}$  prutů v pasech ve směru  $x$  a  $y$  a ramen  $r_x, r_y$  k těžištím těchto ploch, přibližně  $r_x, r_y = \frac{1}{2}H$ . Po rozboru tuhosti dané mezipasové soustavy

prutů na zkosení běžným prutovým výpočtem lze zavést i vliv příčného smyku obdobně jako v odst. 6.3. Torzní tuhost je u běžných pravoúhlých soustav pasů bez diagonál ve vodorovných rovinách prakticky nulová ( $D_{33} = 0, \chi = 0$ ); u jiných soustav nutno ji zjistit srovnávacím výpočtem. Výsledné tisky  $M_x, M_y, T_x, T_y$  se využijí pro výpočet osových sil prutů způsobem obvyklým u příhradovin (metoda průsečná). Postup lze rozšířit i na obecně anizotropní desky a je vhodný pro předběžný návrh nebo vyhledání optimální varianty apod. Po definitivním návrhu soustavy lze pak provést přesné posouzení, vycházející z výpočtu osových sil prutů dané soustavy, považované podle povahy styků za prostorovou příhradovinu nebo rám (programy typu STRESS apod.).